

Grup Teori Arasınava Soruları

- 1-) $G = \{(a, b) \mid a, b \in \mathbb{R}, a \neq 0\}$ kümesi üzerinde $\forall (a, b), (c, d) \in G$ için $(a, b) \circ (c, d) = (ac, b+cd)$ işlemi veriliyor. (G, \circ) grup mudur?
- 2-) \mathbb{Z}_4 mertebeden devirli bir grubun bütün üreteçlerini ve altgruplarını bulunuz.
- 3-) G bir grup $a, b \in G$ olsun. $a^4 = e, a^2b = ba$ ise $a = e$ olduğunu gösteriniz.
- 4-) G ve H iki grup $f: G \rightarrow H$ bir grup homomorfizması olsun. H 'nin her alt grubunun f altındaki ters görüntüsü G 'nin bir alt grubudur, gösteriniz.

Cevap Anahtarı

$$1-) G = \{(a, b) \mid a, b \in \mathbb{R}, a \neq 0\}$$

$$(a, b) \circ (c, d) = (ac, bc + d) \in G$$

$$(a, b) = (a', b') \text{ ve } (c, d) = (c', d') \Rightarrow$$

$$(a, b) \circ (c, d) = (a', b') \circ (c', d') \text{ olup iyi tanımlı}$$

$$* (a, b) \circ [(c, d) \circ (e, f)] = (a, b) \circ (ce, de + f) \\ = (ace, bce + de + f)$$

$$[(a, b) \circ (c, d)] \circ (e, f) = (ac, bc + d) \circ (e, f) \\ = (ace, bce + de + f) \text{ olup}$$

birleşme özelliği sağlanır.

$$* (a, b) \circ (x, y) = (ax, bx + y) = (a, b) \Rightarrow x = 1, y = 0$$

$$(x, y) \circ (a, b) = (xa, ya + b) = (a, b) \Rightarrow x = 1, y = 0$$

$$e = (1, 0)$$

$$* (a, b) \circ (x, y) = (ax + bx + y) = (1, 0) \quad x = \frac{1}{a}, y = -\frac{b}{a}$$

$$(x, y) \circ (a, b) = (xa, ya + b) = (1, 0) \quad x = \frac{1}{a}, y = -\frac{b}{a}$$

$$(a, b)^{-1} = \left(\frac{1}{a}, -\frac{b}{a}\right) \text{ bulunur.}$$

2-) $G = \langle a \rangle$ 84. mertebeden devirli grup ise

$$84 = 2^2 \cdot 3 \cdot 7 \quad \varphi(84) = 24 \text{ tane öreter}$$

$$3 \cdot 2 \cdot 2 = 12 \text{ tane dit grup vardır.}$$

$$\text{Öreterler } \langle a \rangle, \langle a^5 \rangle, \langle a^{11} \rangle, \langle a^{13} \rangle, \langle a^{17} \rangle, \langle a^{19} \rangle, \\ \langle a^{23} \rangle, \langle a^{25} \rangle, \langle a^{29} \rangle, \langle a^{31} \rangle, \langle a^{37} \rangle, \langle a^{41} \rangle, \langle a^{43} \rangle, \\ \langle a^{47} \rangle, \langle a^{53} \rangle, \langle a^{55} \rangle, \langle a^{59} \rangle, \langle a^{61} \rangle, \langle a^{65} \rangle, \langle a^{67} \rangle, \\ \langle a^{71} \rangle, \langle a^{73} \rangle, \langle a^{79} \rangle, \langle a^{83} \rangle$$

$$\text{dit gruplar } \langle a \rangle, \langle a^2 \rangle, \langle a^3 \rangle, \langle a^4 \rangle, \langle a^6 \rangle, \langle a^7 \rangle \\ \langle a^{12} \rangle, \langle a^{14} \rangle, \langle a^{21} \rangle, \langle a^{28} \rangle, \langle a^{42} \rangle, \langle a^{84} = e \rangle$$

$$3-) a^2b = ba, a^4 = e \Rightarrow a^2ba^3 = b$$

(2)

$$b = a^2ba \Rightarrow a^2ba^3 = a^2ba \Rightarrow a^2b = a^2ba^2$$

$$b = ba^2 \Rightarrow a^2 = e \Rightarrow b = ba \Rightarrow a = e$$

bulunur.

4) $f: G \rightarrow H$ ve $K \leq H$ olsun.

$$\bar{f}^{-1}(K) = \{a \in G \mid f(a) \in K\}$$

$\forall a, b \in \bar{f}^{-1}(K) \Rightarrow f(a), f(b) \in K$ dir.

$$f(ab^{-1}) = f(a)f(b^{-1}) = f(a)f(b)^{-1} \in K \text{ olup}$$

$ab^{-1} \in \bar{f}^{-1}(K)$ bulunur. $\bar{f}^{-1}(K) \leq G$ dir.